PROBLEMAS DE CADENAS DE MARKOV

M1. Obtener el espacio de estados, la distribución inicial y la matriz de probabilidades de transición de las CMDT homogéneas que se definen a continuación:

a)Un grupo de cuatro niños juega a un juego que consiste en lanzarse una pelota de uno a otro. En cada momento el niño que tiene la pelota tiene la misma predisposición para lanzar la pelota a cualquiera de los otros tres niños. Sea X0 la variable que describe el niño que tiene la pelota inicialmente, y para n ≥1, Xn es el niño que tiene la pelota después del enésimo lanzamiento.

b) Se colocan dos bolas blancas y dos bolas negras en dos urnas de forma que cada urna contenga dos bolas. En cada extracción se saca al azar una bola de cada urna. Las dos bolas extraídas se intercambian de urna. Sea X0 el número de bolas blancas que hay inicialmente en la primera urna. Para n ≥ 1, se define Xn como el número de bolas blancas que hay en la primera urna después de haberse efectuado n extracciones, y por lo tanto n intercambios.

c) Considérese una partícula que realiza un recorrido aleatorio sobre una circunferencia en la que se han marcado 4 puntos (representados por 0,1,2 y 3) en el sentido de las agujas del reloj. La partícula tiene una probabilidad p de moverse al punto de su izquierda y 1-p de moverse al punto de su derecha(sentido contrario a las agujas del reloj). Sea X0 la posición inicial de la partícula y, para n ≥ 1, Xn describe la posición de la partícula después de n movimientos.

d)Una fábrica tiene dos máquinas, de las que sólo utiliza una en cada uno de los periodos de tiempos considerados. La probabilidad de que se averíe una máquina en un día determinado es p. Sólo hay un operario encargado de la reparación, que tarda dos días en repara una máquina, el operario encargado de su reparación no acude a repararla hasta el día siguiente. Sea (Xn, Yn) el par de variables que describen, respectivamente, el número de máquinas en condiciones de trabajar al acabar el día n e Yn la variable que describe si el trabajo de este día se ha utilizado en repara una máquina averiada que no ha sido totalmente reparada o no.

M2. En referencia al problema 1.a, obtener la probabilidad de que después del tercer lanzamiento la pelota esté en manos del niño

a) Que la tenía al iniciarse el juego.
b) Que la tenía después del primer lanzamiento.

M3. En referencia al problema 1.b, obtener

a)P{Xn=1|X0=1},P{Xn=1}.

b)$P\{X_n=1, X_{n-1}=2, X_{n-2}=1|X_0=1\}$, $E\{X_n\}$, $E\{X_n|X_{n-1}=1\}$

M4. Un petrolero realiza las travesías entre una Plataforma Petrolífera y una refinería y viceversa de forma interrumpida tardando 12 horas en cada viaje. El barco es propulsado por dos motores, cada uno de los cuales puede sufrir una avería durante el trayecto con una probabilidad de 0.1. El barco puede navegar con un motor averiado. En este caso, el mecánico de a bordo intenta reparar el motor averiado, con una probabilidad de éxito de 0.6 en cada travesía. Si se averían los dos motores, el barco es remolcado a su destino y debe permanecer amarrado en el puerto durante 24 horas (el tiempo de realizar dos viajes) para ser reparado por completo. Inicialmente el barco navega en perfectas condiciones.

a) Comprobar que el sistema se puede modelizar mediante una cadena de Markov. Definir los estados de la cadena, hallar la matriz de probabilidades de transición.
b) Clasificar los estados de la cadena y hallar las clases de equivalencia.

M5. Consideremos sucesivos lanzamientos independientes de una moneda con probabilidad p de salir cara y probabilidad q=1-p de salir cruz. Consideremos el proceso estocástico $\{X_n, n\geq 3\}$ dónde X_n es una variable aleatoria que registra el número total de caras obtenidas en los lanzamientos (n-2), (n-1) y enésimo de la moneda. Discutir si este proceso estocástico es ó no una cadena de Markov.

M6. Se realiza una sucesión de experimentos que consiste cada uno de ellos en lanzar una bola en una de tres cajas. La bola no puede caer fuera de alguna de estas cajas y la probabilidad de que la bola caiga en cada una de ellas es 1/3. Sea X_n, $n\geq 1$ la variable aleatoria que describe el número de cajas no vacías después del enésimo lanzamiento. Obtener la matriz de probabilidades de transición y la matriz de probabilidades de transición de n pasos de la cadena.

M7. Estudiar los procesos estocásticos definidos por las matrices:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

M8. Considerar un proceso markoviano con la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuál es el tiempo medio de primer paso de 3 a 2?

b) ¿Cuales deberían ser las probabilidades iniciales de estado $\pi\langle 0 \rangle = [\pi_1\langle 0 \rangle, \pi_2\langle 0 \rangle, \pi_3\langle 0 \rangle]$ para que el proceso entrase en estado estacionario después de <u>una</u> transición?

M9. Un taller de reparaciones puede efectuar el trabajo A o el trabajo B pero no los dos simultáneamente; la tarea A requiere 2 días y la B 1 día. Los posibles estados del taller son pues:

1 = ninguna tarea, 2 = primer día de la tarea A

3 = segundo DIA de la tarea A 4 = tarea B

La probabilidad de una nueva demanda de tarea A al principio de cada día es a; la de la tarea B es b. No hay colas, si el taller está a mitad de ejecución de una tarea A, la llegada de una nueva demanda se pierde. La única ambigüedad se plantea cuando el taller termina un trabajo al final de un día y tiene la posibilidad de empezar al día siguiente con una tarea A o una B. Las dos políticas son posibles:

1) Empezar siempre con una tarea A con preferencia a una B

2) Empezar siempre con una tarea B con preferencia a una A

a) Demostrar que para la política 1 la matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \\ (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \end{bmatrix}$$

b) Encontrar las probabilidades límite de estados para este proceso

c) Encontrar la matriz de probabilidades de transición para la política 2

d) ¿Cual es la relación entre los porcentajes límite de días de desocupación de ambas políticas?

M10. El siguiente proceso de Markov empieza en el estado 1

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Encontrar las probabilidades de que:

a) El proceso esté en el estado 3 después de tres transiciones

b) Después de la tercera transición desde el estado 3 hasta el 2 las dos transiciones siguientes sean $\langle 2 \to 1 \to 3 \rangle$ o $\langle 2 \to 3 \to 3 \rangle$

c) El proceso entre en el estado 2 exactamente una vez en las tres primeras transiciones

d) El proceso realice la transición $1 \to 2$ exactamente una vez en las tres primeras transiciones

e) El número esperado de veces que el proceso entrará en el estado 2 durante las tres primeras transiciones.

M11. Supongamos que la probabilidad de que mañana llueva si hoy está lloviendo es 0.6, y que la probabilidad de que mañana haga buen tiempo si hoy hace buen tiempo es 0.4.

a) Determinar la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov correspondiente.

b) Hallar la distribución de probabilidad del estado estacionario.

M12. Determinar las clases de las siguientes cadenas de Markov y decir si son o no recurrentes

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

M13. Consideremos el siguiente juego: un jugador apuesta una unidad en cada partida. Tiene una probabilidad p de ganar y q=1-p de perder. seguirá jugando hasta que se arruina o alcanza una fortuna de T unidades.

Sea X_n la fortuna del jugador en la enésima partida.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} Xn + 1 & \text{con probabilidad } p \\ Xn - 1 & \text{con probabilidad } q = 1 - p \end{pmatrix} \quad 0 < X_n < T$$

$$X_{n+1} = X_n \qquad X_n = 0 \text{ ó } T$$

$\{X_n\}$ es una cadena de Markov. Supongamos que las sucesivas partidas del juego son independientes y que la fortuna inicial del jugador es X_0

a) Determinar la matriz de probabilidades de transición de 1 paso de la cadena de Markov

b) Hallar las clases de la cadena de Markov

M14. Supongamos que una red de comunicaciones transmite dígitos binarios 0 o 1. Al recorrer la red, existe una probabilidad q de que el dígito binario se reciba de forma incorrecta en el siguiente paso. Si X_0 denota un dígito binario que entra en el sistema, X_1 el dígito recibido después de la primera transición, X_2 el dígito recibido después de la segunda transición, ... X_n , entonces es una cadena de Markov.

Hallar la matriz de probabilidades de transición y la distribución de probabilidad del estado estacionario.

M15. Considerar la siguiente política (k,Q) de gestión de inventarios. Sean D_1,D_2,... las demandas de un producto en los períodos 1,2,...., respectivamente. Si la demanda durante un periodo excede el número de items disponibles, la demanda insatisfecha es retenida, de manera que se satisface cuando llega el siguiente pedido de reposición del inventario. Denotemos por Z_n

(n=0,1,2,...) la cantidad de inventario disponible menos el número de unidades retenidas antes de efectuar un pedido de reposición de inventario al final del periodo n (Z_0=0). Si Z_n es cero o positivo, no se retienen órdenes. Si Z_n es negativo, entonces $-Z_n$ representa el número de unidades de demanda retrasada y no queda inventario disponible. Si al principio del periodo n, Z_n<k=1, se efectua un pedido de reposición de 2m (Qm en el caso general) unidades, donde m es el menor entero tal que Z_n+2m>=1. (La cantidad pedida es el menor múltiplo entero de 2, que lleva el nivel de inventario hasta al menos una unidad). Sean D_n variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas que toman cada uno de los valores 0,1,2,3,4 con probabilidad 1/5. Denotemos por X_n el valor del stock disponible después de efectuar el pedido al final del periodo n (X_0=2). Resulta entonces:

$$X_n = X_{n-1} - D_n + 2m, \quad \text{Si } X_{n-1} - D_n < 1$$
$$(n=1,2,3,....)$$
$$X_n = X_{n-1} - D_n, \quad \text{Si } X_{n-1} - D_n >= 1$$

y Xn es una cadena de Markov con solo dos estados: 1,2.

a) Encontrar la Matriz de Transiciones

b) Encontrar las probabilidades del estado estacionario

c) Suponer que el coste de efectuar un pedido de reposición es (3+3m).
El coste de mantenimiento del stock es Z_n, si Z_n>=0, y cero en caso contrario.
El coste de ruptura del stock es $-4Z_n$, si Z_n<0. Encontrar el coste medio esperado por unidad de tiempo.

d) Comprobar que, en general, para una política (k,Q) los estados posibles son k,k+1,k+2,......,k+Q-1.

M16. El Servicio Hidrológico de la Comunidad Autónoma de X planea construir un embalse para regular la cuenca de uno de sus ríos con el objetivo de satisfacer los requerimientos de agua para regadío. La capacidad máxima del embalse previsto será de 4.000.000 m^3, o, de manera abreviada 4 unidades de agua (1 unidad de agua = 1.000.000 m^3).

Antes de proceder a la construcción el Servicio desearía tener alguna idea sobre la efectividad del mismo a largo plazo. Para ello se ha llevado a cabo un estudio sobre los volúmenes semanales de agua aportados por el río, encontrándose con que pueden aproximarse por medio de la siguiente distribución de probabilidad discreta:

Aportación semanal en unidades de agua	2	3	4	5
Probabilidad	0.3	0.4	0.2	0.1

El Servicio está considerando la posibilidad de contratos de regadío que requerirán el consumo de 2 unidades de agua por semana, pero adicionalmente, para mantener los estándares de calidad del agua para otros usos, deberá dejar salir al menos 1 unidad de agua por semana. Por lo tanto el objetivo semanal será dejar salir 3 unidades de agua. Si el estado del embalse (nivel del embalse) más la aportación de agua del río es menor que esta cantidad se tendrá que dejar salir menos agua, afectando la carencia a los regadíos. Si el embalse está lleno, cualquier exceso será vertido por los aliviaderos. El nivel mínimo admitido del embalse (estado mínimo) no podrá ser inferior a una unidad de agua.

a) Encontrar la matriz de probabilidades de transición, y comprobar que se trata de un proceso markoviano.

b) ¿Cuál será el número medio de semanas transcurrido desde que el embalse se encuentra en el estado con 2 unidades de agua hasta que esté totalmente lleno?

c) Supuesto el embalse en el estado mínimo con 1 unidad de agua, ¿Cuantas semanas tardará, en promedio, en volver a estar en la misma situación?

d) Suponiendo que la primera semana partimos de una situación en la que se embalsaban 3 unidades de agua ¿Cual es la probabilidad de que dos semanas después se encuentre al mínimo?.

M17. Una tienda de venta de ordenadores personales tiene un modelo particular cuyo stock puede reponerse semanalmente.

Representemos por D_1, D_2,....., la demanda de este modelo durante la primera semana, la segunda, etc.. Suponemos que las demandas D_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, que tienen una distribución de Poisson de parámetro λ=2. Supongamos que X_0 representa el número de unidades del modelo en el momento inicial, X_1 el número de unidades disponibles al final de la primera semana, X_2 el número de unidades disponibles al final de la segunda semana, y así sucesivamente. Supongamos que X_0=3.

El sábado por la noche la tienda efectúa un pedido al almacén central que le es servido el lunes por la mañana a primera hora. La tienda utiliza la siguiente política de gestión de stocks: si el número de unidades disponibles al final de la semana es menor de 2 unidades, la tienda efectúa un pedido de reposición de 3 unidades. En caso contrario no efectúa ningún pedido. Se supone que las ventas se pierden cuando la demanda es superior al inventario disponible. Los posibles estados del proceso son los enteros X_t que representan el número de unidades disponibles al final de cada semana. Se pide:

a) Encontrar una expresión que permita evaluar iterativamente las variables aleatorias X_t.

b) Comprobar que las X_t, t=0,1,2,...., constituyen una cadena de Markov.

c) Calcular la matriz de probabilidades de transición.

d) Partiendo de un estado con tres unidades disponibles, ¿Cual es el tiempo medio hasta que el stock es cero?

e) Suponiendo que cada unidad en stock comporta un coste semanal de 300 pts., ¿Cual seria el coste medio semanal esperado a largo plazo?.

M18. Una máquina tiene dos piezas colocadas en paralelo de manera que para funcionar utiliza solo una de ellas, quedando la otra de repuesto para reemplazar a la que trabaja cuando esta se estropea, si está en condiciones de trabajar. Las piezas trabajan de manera que se estropean durante un periodo de tiempo dado con una probabilidad q.

Supongamos que la pieza que está trabajando, en caso de que se estropee, lo hace al final de un periodo, de manera que la pieza de repuesto empieza a trabajar, si está en condiciones de hacerlo, al principio del periodo siguiente. Hay un único mecánico para reparar las piezas estropeadas, que tarda dos periodos en reparar una pieza estropeada.

El proceso puede describirse mediante un vector X_t de dos componentes U y V, donde U representa el número de piezas hábiles, trabajando o en condiciones de trabajar, al final del periodo t-ésimo, y V toma el valor 1 si el mecánico requiere únicamente un periodo adicional para completar una reparación, si ya está procediendo a ella, y 0 en caso contrario. Por lo tanto, el espacio de estados consta de cuatro estados:

(2,0), (1,0), (0,1), y (1,1)

(Por ejemplo, el estado (1,1) implica que una componente opera y la otra necesita un periodo adicional para acabar de ser reparada).

Denotemos los cuatro estados por 0,1,2 y 3 respectivamente (Es decir X_t = 0 quiere decir X_t = (2,0), por ejemplo).

a) Comprobar que $\{X_t\}$, t=0,1,2,......, es una cadena de Markov.

Hallar la matriz de probabilidades de transición.

b) Hallar la distribución de probabilidad del estado estacionario.

M19. Las familias de cierto país se clasifican según residan en áreas rurales, urbanas o suburbanas. Los estudios de movilidad demográfica estiman que, en promedio, en el curso de un año, el 15% de las familias urbanas cambia de residencia y se traslada a un área suburbana, y el 5% a un área rural; mientras que el 6% de las familias residentes en áreas suburbanas se traslada a áreas urbanas, y el 4% a áreas rurales, y finalmente el 4% de las familias rurales migra a las áreas urbanas y el 6% a las suburbanas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia que vive ahora en un área urbana siga viviendo en un área urbana dentro de dos años?. ¿Y en una suburbana?. ¿Y en una rural?.

b) Supongamos que en el presente el 40% de las familias del país viven en áreas urbanas, el 35% en suburbanas y el 25% en rurales. ¿Qué porcentaje de familias vivirá en áreas urbanas dentro de dos años?.

c) ¿Qué distribución de población es de prever en el futuro si las tendencias no cambian?.

M20. Un bosque consta de dos tipos de árboles: jóvenes (entre 0 y 3 mts de altura) y adultos (más de 3 mts). Cada año, el 30% de los árboles jóvenes muere, el 10% se vende por $20 cada uno, el 20% se mantiene entre 0 y 3 mts y el 40% crece superando los 3 mts. Cada año, el 40% de los árboles adultos se vende por $50, el 20% se vende por $20, el 30% permanece en el bosque y un 10% muere.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un árbol joven muera antes de ser vendido ?

b) Si plantar un árbol joven cuesta $5, ¿cuál es el beneficio esperado para cada árbol joven plantado ?

Soluciones:

M1.

a) S={0,2,3},a=(0.25,0.25,0.25,0.25), $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

b) S={0,1,2}, a=(1/6,4/6,1/6), $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) S={0,1,2,3},a=(0.25,0.25,0.25,0.25), $P = \begin{bmatrix} 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \end{bmatrix}$

d) S={(0,0),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)},a=(p^2,2*p*(1-p),0,$(1-p)^2$,0),

$$P=\begin{array}{c|ccccc} & (0,0) & (1,0) & (1,1) & (2,0) & (2,1) \\ \hline (0,0) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1,0) & 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ (1,1) & p & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ (2,0) & p^2 & 2p(1-p) & 0 & (1-p)^2 & 0 \\ (2,1) & p^2 & 2p(1-p) & 0 & (1-p)^2 & 0 \end{array}$$

M2.

a) $p_{00}^{(3)}=0.2215562$
b) $p_{00}^{(2)}=0.332667$

M3.

a) Irreducible y aperiódica. P{Xn=1|X0=1},P{Xn=1}.Los dos son 0.666 ya que no importa el estado inicial.
b) P{Xn=1,Xn-1=2, Xn-2=1|X0=1} =p21*p12*$p_{01}^{(n)}$.Aplicando Chapman-Kolgomorv.

E{Xn}=0.999999, E{Xn|Xn-1=1}=1.aplicando definición de esperanza.

M4.

a) S={0,1,2,3}

0 Dos motores funcionando.

1 Un motor funcionando.

2 Amarrado en el puerto dia 1.

3 Amarrado en el puerto dia 2.

$$P=\begin{bmatrix} 0.81 & 0.18 & 0.01 & 0 \\ 0.54 & 0.42 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Irreducible y aperiódica.

M5.

Si.

M6.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M7.

a) P1: Estados{1,2} : clase absorbente. Estado 3:Transitorio.
b) P2: Cadena irreducible y aperiódica.
c) P3: Cadena irreducible y aperiódica.
d) P4: Cadena irreducible y aperiódica.
e) P5: Estado 2:Transitorio, Estados {1,3} clase absorbente.

M8.

a)μ_{32}=52/3,b)π^T=(9/20,3/40,19/40)

M9.

a) $\pi_1=(1-a)(1-b)/(1+a)$, $\pi_2=\pi_3=a/(1+a)$, $\pi_4=b(1-a)/(1+a)$

b) $$P=\begin{bmatrix} AB & aB & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ AB & aB & 0 & b \\ AB & aB & 0 & b \end{bmatrix}, A=(1-a), B=(1-b)$$

c) Mejor la política 2.

M10.

a) $p_{13}^{(3)}=0.72$
b) 0.68
c) 0.2
d) 0.4
e) 0.75

M11.

a) $$P=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

b) $\pi_0=0.6$, $\pi_1=0.4$

M12.

a) Una única clase de equivalencia periódica de periodo 3.
b) Estados {2,3} clase comunicante cerrada, la 1 es absorbente y la 4 es transitoria.

M13.

a) $$P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ T-2 \\ T-1 \\ T \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1-p & 0 & p & 0 \\ & & & & 1-p & 0 & p \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) C(0)={0}, C(1)={1,2,3,...,T-1}, C(T)=T

M14.

a) $$P=\begin{bmatrix} 1-q & q \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

b)$\pi_0=0.5,\pi_1=0.5$.

M15.

a) $$P=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

b)$\pi_0=0.5,\pi_1=0.5$.

c)0.91

M16.

a) $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$

b)μ_{24}=10 semanas

c)μ_{11}=5 semanas

d)$p_{31}^{(2)}$=0.09

M17.

$X_{i+1} = \max\{0, X_i - D_i\} + P_i(X_i - D_i).$

a) $P_i(X_i - D_i) = 3$ si $X_i - D_i < 2$

$P_i(X_i - D_i) = 0$ si $X_i - D_i \geq 0$

b)Número finito de estados, verifica hipótesis Markoviana y estacionaria.

c) $P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.3233 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353 & 0 \\ 0.1428 & 0.1805 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353 \\ 0.5940 & 0.2707 & 0.1353 & 0 & 0 \\ 0.3233 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353 & 0 \\ 0.1428 & 0.1805 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$

d)μ_{30}=2.97 semanas

e)389.9 ptas/semana.

M18.

a) $P = \begin{array}{c} (2,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \end{array} \begin{bmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-q & q & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b)

M19.

Nomenclatura de los estados: U=0,SU=1,R=2.

a)$p_{22}^{(2)}$=0.8144

b)0.31456

c) U 38/183,SU 90/183,R 55/183

M20.

a)0.446

b)14.69 $